Exam Vectoranalyse

22 June 2012

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het maximaal aantal punten dat u kunt behalen is 100. U krijgt 10 punten gratis. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) **[9+4+9 Punten.]**

   Laat S het oppervlak in $\mathbb{R}^3$ zijn dat gegeven is door $f(x, y, z) = 0$ waarbij $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - z^3 - 10 = 0$. Laat $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

   9 9 (a) Laat zien dat (x_0, y_0, z_0) een punt op het oppervlak S is, en bereken het raakvlak aan S in (x_0, y_0, z_0).

   2 (b) Laat zien dat $f(x, y, z) = 0$ lokaal kan worden opgelost naar z, d.w.z. z kan beschouwd worden als een functie van x en y in de buurt van (x_0, y_0, z_0).

   (c) Beschouw de grafiek van een functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geef de formule voor het raakvlak aan de grafiek van g, in een punt op de grafiek van g. Laat expliciet zien dat voor de functie $z = g(x, y)$ gedefinieerd in onderdeel (b), het raakvlak aan zijn grafiek in $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ gelijk is aan het raakvlak gevonden in onderdeel (a).

1. (English) **[9+4+9 Points.]**

   Let S be the surface in $\mathbb{R}^3$ defined by $f(x, y, z) = 0$ where $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 - z^3 - 10 = 0$. Let $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

   (a) Show that (x_0, y_0, z_0) is a point on the surface S, and find the tangent plane to the surface S at the point (x_0, y_0, z_0).

   (b) Show that $f(x, y, z) = 0$ can locally be solved for z, i.e. z can be expressed as a function of x and y in some neighborhood of (x_0, y_0, z_0).

   (c) Consider the graph of a function $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Write down the formula satisfied by the tangent plane of the graph of g at a point on the graph of g. Show explicitly that for the function $z = g(x, y)$ defined in part (b), the tangent plane of its graph at $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ coincides with the tangent plane found in part (a).

2. (Nederlands) **[8+10 Punten.]**

   Laat $u(x, y, z)$ een C^2 functie zijn. Door het definiëren van cylinder coördinaten volgens $(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, kan u als een functie van r, φ en z worden beschouwd.

   8 (a) Druk $-y\frac{\partial}{\partial x}u + x\frac{\partial}{\partial y}u$ uit in partiële afgeleiden naar r, φ en z. (Aanwijzing: $\arctan'(s) = \frac{1}{1+s^2}$.)

(b) Druk $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u$ uit in partiële afgeleiden naar r, φ en z.

2. (English) [8+10 **Points.**] Let $u(x, y, z)$ be a C^2 function. By defining cylinder coordinates according to $(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, the function u becomes a functions of r, φ and z.

   (a) Express $-y\frac{\partial}{\partial x}u + x\frac{\partial}{\partial y}u$ in terms of partial derivatives with respect to r, φ and z. (Hint: $\arctan'(s) = \frac{1}{1+s^2}$.)

   (b) Express $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u$ in terms of partial derivatives with respect r, φ and z.

3. (Nederlands) [8+10+4+4 **Punten.**]
Beschouw het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

   (a) Laat C de helix gedefinieerd door

$$C = \{(x, y, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi) \,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

   zijn. Bereken $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

   (b) Beschouw het ringvormige gebied

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a^2 \le x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0\},$$

   waarbij $0 < a < 1$ een constante is. Verifieer de stelling van Stokes voor het vectorveld $\mathbf{F}$ op D, d.w.z. toon aan dat

12

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

   waarbij ∂D de rand van D is. Hier mag je aannemen dat het eenheids vectorveld $\mathbf{k}$ de oriëntatie van D definieert.

   (c) Is het vectorveld $\mathbf{F}$ conservatief als een vectorveld op $\mathbb{R}^3$? Beargumenteer uw antwoord.

   (d) Laat C een willekeurige eenvoudige, gesloten kromme zijn die glad naar de cirkel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\},$$

   kan worden gedeformeerd zonder de z-as te snijden. Beargumenteer dat $\left|\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}\right| = 2\pi$.

3. (English) [8+10+4+4 **Points.**]
Consider the vectorfield $\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

   (a) Let C be the helix defined by

$$C = \{(x, y, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi) \,|\, 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

   Compute $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

(b) Consider the annular disk

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}\,,$$

where $0 < a < 1$ is a constant. Verify Stokes' theorem for the vectorfield $\mathbf{F}$ on D, i.e. show that

$$\iint_D \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}\,,$$

where ∂D is the boundary of D. Here you can assume that the unit vector $\mathbf{k}$ defines the orientation of D.

(c) Is the vectorfield $\mathbf{F}$ conservative as a vectorfield in $\mathbb{R}^3$? Justify your answer.

(d) Let C be an arbitrary simple, closed curve which can be smoothly deformed to the circle

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}\,,$$

without intersecting the z-axis during the deformation. Argue that $\left|\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}\right| = 2\pi$.

4. (Nederlands) **[8+8+4+4 Punten.]**

Laat $\mathbf{n}(x,y,z)$ een eenheids normaal op een oppervlak S zijn. De richtingsafgeleide van een differentierbare functie $f(x,y,z)$ in de richting van $\mathbf{n}$ heet de *normaal afgeleide* van f, en wordt geschreven als $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$. Merk op dat $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$.

6

(a) Laat S het deel van de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in het eerste octant zijn (d.w.z. dat $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$). De oirëntatie op de sfeer is gegeven door de naar buiten wijzende eenheids normaal. Laat $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Bereken

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, dS\,.$$

18

8

(b) Laat D het deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ zijn dat in het eerste octant ligt; d.w.z.

$$D = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Bereken

$$\iiint_D \nabla \cdot (\nabla f)\, dV\,,$$

waarbij f als in onderdeel (a) gedefiniëerd is.

4

(c) Maak gebruik van de stelling van Gauss om de integraal in onderdeel (b) te bereken, en geef het verband aan tussen de resultaten van onderdeel (a) en onderdeel (b).

(d) Neem aan dat $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat voor ieder georënteerd oppervlak S geldt

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, dS = 0\,.$$

Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0\,,$$

d.w.z. g is harmonisch.

4. (English) [**8+8+4+4 Points.**]

Let $\mathbf{n}(x, y, z)$ be a unit normal to a surface S. The directional derivative of a differentiable function $f(x, y, z)$ in the direction of $\mathbf{n}$ is called a *normal derivative* of f, denoted $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$. Note that $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$.

(a) Let S denote the portion of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in the first octant (i.e. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), oriented by the unit normal that points away from the origin. Let $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Evaluate

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dS \, .$$

(b) Let D denote the piece of the solid ball $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ in the first octant; that is

$$D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \, x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}.$$

Compute

$$\iiint_D \nabla \cdot (\nabla f) \, dV \, ,$$

where f is as in part (a).

(c) Apply Gauss's theorem to the integral in part (b), and reconcile your result with the answer in part (a).

(d) Suppose $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is such that for any closed oriented surface S,

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, dS = 0 \, .$$

Show that then

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0 \, ,$$

i.e. g is harmonic.

9 + 8 + 8 + 4 + 8 + 4